

### Задачи прикладного содержания

1. Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте  $h$  км над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле  $l = \sqrt{2Rh}$ , где  $R=6400$  (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километра? Ответ выразите в км.
2. Мяч бросили под углом  $\alpha$  к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . При каком значении угла  $\alpha$  (в градусах) время полёта составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью  $v_0 = 30$  м/с? Считайте, что ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.
3. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью  $v_0 = 57$  км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением  $a = 12$  км/ч<sup>2</sup>. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением  $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ . Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.
4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением  $pV^{1,4} = const$ , где  $p$  (атм.) — давление в газе,  $V$  — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.
5. Некоторая компания продает свою продукцию по цене  $p = 500$  руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют  $v = 300$  руб., постоянные расходы предприятия  $f = 700000$  руб. месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле  $G(q) = q(p - v) - f$ . Определите наименьший месячный объём производства (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 300000 руб.
6. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени  $n = 3$  моля воздуха объёмом  $V_1 = 8$  л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма  $V_2$ . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением  $A = anT \log_2 \frac{V_1}{V_2}$  (Дж), где  $a = 5,75$  — постоянная, а  $T = 300$  К — температура воздуха. Какой объём  $V_2$  (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?
7. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде  $PV^a = const$ , где  $P$  (Па) — давление в газе,  $V$  — объём газа в кубических метрах,  $a$  — положительная константа. При каком наименьшем значении константы  $a$  уменьшение вдвое объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?
8. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна  $P = m(\frac{v^2}{L} - g)$ , где  $m$  — масса воды в килограммах,  $v$  — скорость движения ведёрка в м/с,  $L$  — длина верёвки в метрах,  $g$  — ускорение свободного падения (считайте 10 м/с<sup>2</sup>).

С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

9. Независимое агентство намерено ввести рейтинг  $R$  новостных изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$  и объективности  $Tr$  публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от  $-2$  до  $2$ . Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность — втрое дороже, чем оперативность. В результате, формула примет вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}$$

Каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 30?

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием  $f = 30$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

11. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону  $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $t$  — время в секундах, амплитуда  $U_0 = 2$  В, частота  $\omega = 120\pi \text{ с}^{-1}$ , фаза  $\varphi = -30$ . Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

12. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону  $v(t) = 5 \sin \pi t$  (см/с), где  $t$  — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

13. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой  $m = 8$  кг и радиуса  $R = 10$  см, и двух боковых с массами  $M = 1$  кг и с радиусами  $R + h$ . При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в  $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ , задаётся формулой

$I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$ . При каком максимальном значении  $h$  момент инерции катушки не превышает предельного значения  $625 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ ? Ответ выразите в сантиметрах.

14. При температуре  $0^\circ\text{C}$  рельс имеет длину  $l_0 = 10$  м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону  $l(t^0) = l_0(1 + \alpha \cdot t^0)$ , где  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$  — коэффициент теплового расширения,  $t^0$  — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 7,5 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

15. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы:  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1320$  К,  $a = -20$  К/мин,  $b = 200$  К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.