Занятие №8.Простейшие тригонометрические уравнения.

1. Уравнение $\sin x = a$ имеет решение в виде серии двух решений:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z$$

(это же можно записать короче: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$).

Частные случаи: $\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z$

$\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

2. Уравнение $\cos x = a$ имеет решение: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$;

Частные случаи: $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k \in Z$

$\cos x = 1;\ x = 2\pi n, n \in Z$

3. Уравнение $tg x = a$ имеет решение: $x = arctg a + \pi n,\ n \in Z$;

4. Уравнение $ctg x = a$ имеет решение: $x = arcctg a + \pi n,\ n \in Z$;

Пример1.: $\sin x = \frac{1}{2}$; не частный случай, следовательно:

$$x_1 = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Пример3. : $\cos x = (-\frac{1}{2})$; не частный случай, следовательно: $x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi k,\ k \in Z$;

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример4. : $tg x = 1$; $x = arctg 1 + \pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример5. : $ctg x = -1$; $x = arcctg(-1) + \pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример6. : $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; не частный случай, следовательно:

$$2x + \frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ ; и } 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z .$$

Выражаем «х» к каждой серии решений:

$$2x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } 2x_2 + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } 2x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$2x_1 = 0 + 2\pi k,\ k \in Z$ и $2x_2 = \frac{4\pi}{6} + 2\pi k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; делим на 2 каждое слагаемое

$$x_1 = \pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;$$

1. Решить уравнение: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x + \frac{1}{2} = 0$; $2\sin x - \sqrt{3} = 0$; $\sin x + 1 = 2$; $-\sin x + 3 = 4$; $2\sin x + 1 = 1$; $3\sin x + 1 = 10$; $4\sin x - \sqrt{5} = 0$

2. Решить уравнение: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x + \frac{1}{2} = 0$; $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; $\cos x + 1 = 2$; $-\cos x + 3 = 4$; $2\cos x + 1 = 1$; $3\cos x + 1 = 10$; $4\cos x - \sqrt{5} = 0$

3. Решить уравнение: $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $tgx = -1$; $tgx + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$; $2tgx - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$; $tgx + 1 = 5$; $-tgx + 3 = 3.5$; $2tgx + 1 = 1$; $3tgx + 1 = 10$; $4tgx - 4\sqrt{3} = 0$

4. Решить уравнение: $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $ctgx = -1$; $ctgx + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$; $2ctgx - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$; $ctgx + 1 = 5$; $-ctgx + 3 = 3.5$; $2ctgx + 1 = 1$; $3ctgx + 1 = 10$; $3ctgx + ctgx - 4\sqrt{3} = 0$

5. Решить уравнения:

а) $2\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$

б) $-\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $2tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

г) $5ctg\frac{x}{3} - 2ctg\frac{x}{3} = 4\sqrt{3}$

Дополнительные задания:

Решить уравнения:

а) $2\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$

б) $-\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $2ctg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

г) $5tg\frac{x}{3} - 2tg\frac{x}{3} = 4\sqrt{3}$

Домашнее задание:

Решить уравнения:

а) $6\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}$

б) $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = -\frac{1}{2}$

в) $3ctg(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}) - ctg(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

г) $\frac{1}{3}tg(\frac{x}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$