

Занятие №12. Свойства логарифмов. Логарифмическая функция

Опр. Логарифмом числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется степень c , в которую нужно возвести основание a , чтобы получить подлогарифмическое выражение b , т.е. $\log_a b = c, a^c = b$.

Прим.1: $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; *Прим.2:* $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, так как $2^{-1} = \frac{1}{2}$

Свойства логарифма:

1. Сумма логарифмов: $\log_a b + \log_a d = \log_a (b \cdot d)$. *Пример:* $\log_8 16 + \log_8 4 = \log_8 64 = 2$.

2. Разность логарифмов: $\log_a b - \log_a d = \log_a \frac{b}{d}$. *Пример:* $\log_4 32 - \log_4 2 = \log_4 16 = 2$.

3. Степень можно вынести за знак логарифма:

$$\log_a b^p = p \log_a b. \quad \text{Пример: } \log_4 16^3 = 3 \log_4 16 = 3 \cdot 2 = 6.$$

4. Основание и подлогарифмическое выражение можно возвести в одинаковую степень:

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p. \quad \text{Пример: } \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt{3}} = \log_3 \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right)^2 = \log_3 \frac{1}{27} = -3.$$

5. Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \quad \text{Пример: } \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} = \frac{\log_3 3\sqrt{3}}{\log_3 \sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$

6. Основание и подлогарифмическое выражение можно поменять местами:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \quad \text{Пример: } \log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5}.$$

7. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$. *Пример:* $7^{\log_7 \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

8. Единицу можно представить как логарифм любого числа по такому же основанию:

$$1 = \log_a a. \quad \text{Пример: } 1 = \log_3 3.$$

9. Ноль можно представить как логарифм единицы по любому основанию:

$$0 = \log_a 1. \quad \text{Пример: } 0 = \log_3 1.$$

10. Любое число можно представить в виде логарифма по выбранному основанию:

$$p = \log_a a^p. \quad \text{Пример: } 4 = \log_3 3^4; \quad \text{Пример: } -\frac{1}{2} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}}.$$

Примечание: $\log_{10} b = \lg b$ - десятичный логарифм. $\log_e b = \ln b$ - натуральный логарифм.

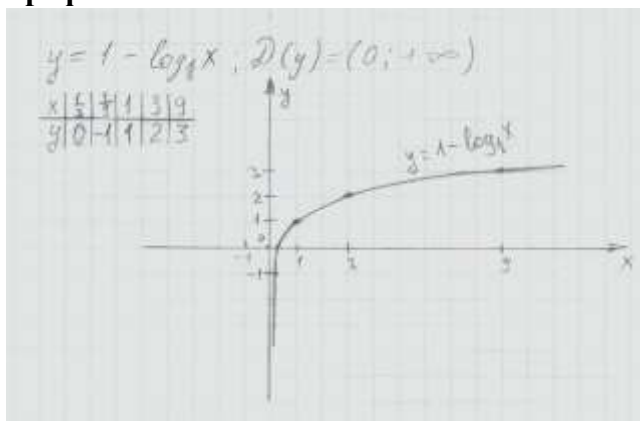
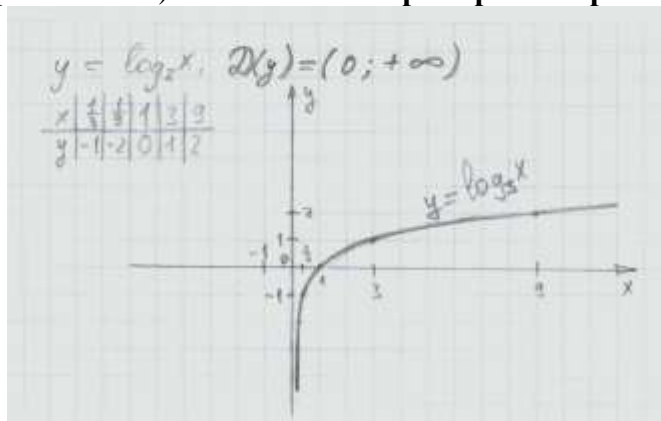
Опр. e - такое число, что касательная к графику функции $y = e^x$ в точке 0, наклонена под углом 45° к положительному направлению оси X . Надо запомнить, что e - число иррациональное и $e \approx 2,7$.

Опр. Функцию, заданную формулой $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$) называют логарифмической функцией с основанием a .

1. Область определения: $D(y) = (0; +\infty)$; **2.** Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$).

Примеры построения графиков:



1. Вычислить: а) $\log_3 \frac{1}{81}$; б) $\log_{16} 1$; в) $\log_4 16$; г) $\log_5 125$; д) $\log_5 0,04$; е) $\log_7 343$;

ё) $\lg 0,01$; ж) $\log_3 \frac{1}{243}$; з) $\log_{\sqrt{2}} 8$; й) $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$; и) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; к) $\log_{0,5} 4$.

2. Найдите логарифмы данных чисел по основанию a :

а) $25, \frac{1}{5}, \sqrt{5}$ при $a = 5$; б) $64, \frac{1}{8}, 2$ при $a = 8$.

3. Запишите число в виде логарифма с основанием a :

а) $2, \frac{1}{2}, 1, 0$ при $a = 4$; в) $3, -1, -3, 1$ при $a = 3$;

4. Упростить выражение: а) $1,7^{\log_{1,7} 2}$; б) $\pi^{\log_{\pi} 5,2}$; в) $5^{1+\log_5 3}$; г) $10^{1-\lg 2}$; д) $4^{2\log_4 3}$.

5. Вычислить: а) $\lg 8 + \lg 125$; б) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$; г) $\log_{0,4} 16 - 2\log_{0,4} 10$;

д) $\log_{0,5} 125 - 3\log_{0,5} 10$; е) $\log_3(\sqrt{10} + 1) - \log_3 \frac{1}{\sqrt{10} - 1}$; ё) $\log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 16$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\log_2 \frac{a}{b}$, если $\log_2 a = 7; \log_2 b = 5$; б) $\log_2 \frac{m}{4n}$, если $\log_2 m = 3; \log_2 n = 7$; в) $5\log_2 \left(\frac{1}{a}\right)^3$, если $\log_2 a = -\frac{1}{3}$;

г) $0,2\log_8 \left(\frac{1}{p}\right)^5$, если $\log_8 p = -5$; д) $\log_3 \frac{k}{27t}$, если $\log_3 k = 4; \log_3 t = 7$; е) $\log_5 \frac{25p}{S}$, если $\log_5 p = 3; \log_5 S = 4$.

7. Построить график функции, определить область определения и область значения:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y = -\log_2 x$; г) $y = -2 + \log_2 x$; д) $y = \log_2(x - 2)$.

8. Построить в одной системе координат: а) $y = \log_2 x$; и $y = \log_4 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; и $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Дополнительные задания: 1. Вычислить: а) $\log_{\sqrt{3}+1}(4 + 2\sqrt{3}) - \log_7 \frac{1}{49}$; б) $14^{\left(\frac{1}{3}\log_6 8 - \log_1 3\right)}$;

в) $\log_2(\sqrt{3} + 1) - \log_2 \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$; г) $\left(\left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3 + \frac{6}{5}\log_5 5}}\right)^{-5}$; д) $4\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} - 25^{\log_{125} 8}\right)$.

Домашнее задание: 1. Вычислить: а) $\log_{2\sqrt{2}} 128$; б) $\log_{0,2} 0,008$; г) $\log_{\sqrt{5}} 0,2$; д) $\log_{0,2} 125$;

е) $2^{\log_2 5}$; ё) $3,8^{\log_{3,8} 11}$; ж) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_1 2}$; з) $3^{2-\log_1 8}$; й) $5^{-3\log_5 \frac{1}{2}}$; и) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_1 3}$; к) $6^{-2\log_6 5}$.

2. Найдите логарифмы чисел по основанию a : 1) $16, \frac{1}{4}, \sqrt{2}$ при $a = 2$; 2) $27, \frac{1}{9}, \sqrt{3}$ при $a = 3$.

3. Запишите в виде логарифма с основанием a : 1) $3, \frac{1}{2}, 0, -1$ при $a = 2$; 2) $1, -2, 0, 3$ при $a = 5$.

4. Вычислить: а) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$; б) $\lg 13 - \lg 130$; в) $2\log_6 3 - \log_6 \frac{1}{4}$; г) $\log_{0,3} 27 - 3\log_{0,3} 10$.

5. Вычислить: а) $\log_2(\sqrt{17} - 1) - \log_2 \frac{1}{\sqrt{17} + 1}$; б) $\log_7(\sqrt{50} - 1) - \log_7 \frac{1}{\sqrt{50} + 1}$;

в) $25^{\frac{1}{2\log_8 5}}$; г) $4^{\log_{\sqrt{2}}(5 - \sqrt{10}) + \log_{\sqrt{2}}(5 + \sqrt{10})}$; д) $5^{-\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{3}\right)} - 2\log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{5}$.

6. Найдите значение выражения: а) $\log_7 \frac{a}{49b}$, если $\log_7 a = 2; \log_7 b = -1$; б) $7\log_4 \sqrt[3]{c}$, если $\log_4 c = -5$.

7. Построить график функции, определить область определения и область значения:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$; б) $y = 2 + \log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$.