

Занятие №13. Производная.

Опр. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при дельта x стремящемся к нулю называется производной функции. Т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

Правила вычисления производных (или правила дифференцирования):

1. $(c)' = 0$, $c - const$ - производная константы равна нулю.
2. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ - множитель можно вынести за знак производной.
3. $(f(x) + g(x) - h(x))' = f'(x) + g'(x) - h'(x)$ - производная суммы или разности функций равна сумме или разности производных этих функций.
4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$ - производная произведения.
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$ - производная частного.
6. $(f(g(x)))' = f'_g \cdot g'_x$ - производная сложной функции.

Производная степенной функции:

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
2. $(kx)' = k$;
3. $(kx^\alpha)' = k \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1}$; *Прим.1:* $(2x+1)' = 2$;

Прим.2: $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$; *Прим.3:* $\left(\frac{3}{x}\right)' = (3x^{-1})' = 3(-1)x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$;

Прим.4: $(2x^3 + 3x^2 + 5x + 4)' = (2x^3)' + (3x^2)' + (5x)' + (4)' = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 5 = 6x^2 + 6x + 5$;

Прим.5: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Производные тригонометрических функций:

1. $(\sin x)' = \cos x$;
2. $(\cos x)' = -\sin x$;
3. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
4. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

Прим.1: $(2 \cos x + 3 \sin x - 5x + 4)' = -2 \sin x + 3 \cos x - 5$;

Прим.2: $\left(\frac{3x-1}{\sin x}\right)' = \frac{(3x-1)' \sin x - (3x-1) \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{3 \sin x - (3x-1) \cos x}{\sin^2 x}$;

Производная показательной функции:

1. $(a^x)' = a^x \ln a$; *Прим.1:* $(3 \cdot 2^x)' = 3 \cdot 2^x \ln 2$;
2. $(e^x)' = e^x$; *Прим.2:* $(-2e^x)' = -2e^x$;

Производная логарифма:

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; *Прим.1:* $(-\ln x + 3)' = -\frac{1}{x}$;
2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; *Прим.2:* $(7 \log_5 x)' = \frac{7}{x \ln 5}$;

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; б) $f(x) = 5x^6 + 4x^2$; в) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x^3$;

г) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$; д) $f(x) = x^3 + 3\sqrt{x} - 1$; е) $f(x) = -\frac{3}{x} + 2x^4 - x$.

2. Найти производную функции в заданных точках:

а) $f(x) = x^2 - 3x, x = -\frac{1}{2}$; б) $f(x) = x - 4\sqrt{x}, x = 0,01$.

3. Найти производную функции:

а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x)$; в) $f(x) = \frac{1+2x}{3-5x}$; г) $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

4. Найти производную функции:

а) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin x$; б) $f(x) = 0,5 + 1,5\sin x$; в) $f(x) = 1 - \cos x$; г) $f(x) = x + 2\cos x$;

д) $f(x) = \sqrt{3} - 3\operatorname{tg}x$; е) $f(x) = 2\operatorname{ctg}x - \sin x$;

5. Найти производную функции:

а) $f(x) = 2x + 3e^x$; б) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}e^x + 5$; в) $f(x) = 4 \cdot 2^x + 5$; г) $f(x) = -3^x - 6x$.

6. Найти производную функции:

а) $f(x) = -2\ln x + \sin x$; б) $f(x) = 3\ln x + 4e^x$; в) $f(x) = 2^x + \log_6 x$; г) $f(x) = \frac{3}{8}\log_{18\pi} x$.

7. Найти производную функции:

а) $f(x) = \sin x \cdot \ln x + 5$; б) $f(x) = -2\ln x(\sin x + 3\operatorname{tg}x)$; в) $f(x) = (\log_2 x + 3x^2)(\sin x + 2\cos x)$;

г) $f(x) = 4e^x(5x + 6x^2)$; д) $f(x) = \frac{(5x + 6x^2)}{4e^x}$; е) $f(x) = \frac{(\log_2 x + 3x^2)}{(\sin x + 2\cos x)}$.

Домашнее задание:**1. Найти производную функции:**

а) $f(x) = -6x^5 + 2x^{\frac{3}{2}}$; б) $f(x) = \frac{2}{3x^2} + x - 1$; в) $f(x) = 7x + \sqrt{x^3} - 5$.

2. Найти производную функции в заданных точках:

а) $f(x) = 3x + \frac{2}{x}, x = -1, x = 3$.

3. Найти производную функции:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}(3x - 5)$; б) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}$.

4. Найти производную функции:

а) $f(x) = 1,5\sin x - 1,5\cos x$; б) $f(x) = 3 + \sqrt{3}\operatorname{tg}x$; в) $f(x) = \operatorname{ctg}x + \operatorname{tg}x$.

5. Найти производную функции:

а) $f(x) = 6 + \frac{4}{5}e^x + 5x$; б) $f(x) = 2^x - 4$; в) $f(x) = -5^x + 7x$.

6. Найти производную функции:

а) $f(x) = -\frac{1}{3}\ln x + 7x$; б) $f(x) = -\ln x + 2^x$; в) $f(x) = 0,5^x + 4\log_2 x$;

7. Найти производную функции:

а) $f(x) = e^x(\cos x + 3x)$; б) $f(x) = \frac{(3\sin x - \cos x)}{(\log_{0,5} x + x^3)}$.