Занятие №9. Тригонометрические уравнения.

1. Уравнение $\sin x = a$ имеет решение в виде серии двух решений:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z$$

(это же можно записать короче: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$).

Частные случаи: $\sin x = -1;\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z$

$\sin x = 1;\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

2. Уравнение $\cos x = a$ имеет решение: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$;

Частные случаи: $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 0;\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ k \in Z$

$\cos x = 1;\ x = 2\pi n, n \in Z$

3. Уравнение $tg x = a$ имеет решение: $x = arctg a + \pi n,\ n \in Z$;

4. Уравнение $ctg x = a$ имеет решение: $x = arcctg a + \pi n,\ n \in Z$;

Пример1.: $\sin x = \dfrac{1}{2}$; не частный случай, следовательно:

$$x_1 = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Пример3. $: \cos x = (-\dfrac{1}{2})$; не частный случай, следовательно: $x = \pm\arccos(-\dfrac{1}{2}) + 2\pi k,\ k \in Z$;

$x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример4. $: tgx = 1;\quad x = arctg 1 + \pi k,\ k \in Z;\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример5. $: ctgx = -1;\quad x = arcctg(-1) + \pi k,\ k \in Z;\ x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример6. $: \sin(2x + \dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}$; не частный случай, следовательно:

$$2x + \frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z; \text{ и } 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Выражаем «х» к каждой серии решений:

$$2x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } 2x_2 + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ и } 2x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$2x_1 = 0 + 2\pi k,\ k \in Z$ и $2x_2 = \dfrac{4\pi}{6} + 2\pi k = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; делим на 2 каждое слагаемое

$$x_1 = \pi k,\ k \in Z \text{ и } x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;$$

1. Решить уравнение: $\sin(-\frac{x}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$ctg(-\frac{x}{2})=1$; $2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$; $2\sin(3x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}tg(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3})=3$; $\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})+1=0$;

2. Решить уравнение:
$2\sin^2 x+\sin x-1=0$; $6\cos^2 x+\cos x-1=0$; $3tg^2x+2tgx-1=0$;

3. Решить уравнение:
а) $2\sin^2 x+3\cos x=0$; б) $5\sin^2 x+6\cos x-6=0$; в) $tgx-2ctgx+1=0$

4. Решить уравнение: а) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$; б) $3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x$;
в) $9\sin x\cos x-7\cos^2 x=2\sin^2 x$; г) $4\sin^2 x-\sin 2x=3$.

5. Решить уравнения: а) $\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$; б) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$;

в) $\cos 5x-\cos 3x=0$; г) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Дополнительные задания:
Решить уравнения:
$2\cos^2 x+\sin x+1=0$; $4\cos x=4-\sin^2 x$;

Домашнее задание:

1. Решить уравнение: $\cos(\frac{\pi}{6}-2x)=-1$; $2\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4})=\sqrt{3}$; $tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})=-1$; $2\cos(\frac{\pi}{4}-3x)=\sqrt{2}$;

2. Решить уравнение: $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; $4\cos^2 x-8\cos x+3=0$; $2tg^2x+3tgx-2=0$;

3. Решить уравнения: $\cos^2 x+3\sin x=3$; $8\sin^2 x+\cos x+1=0$.

4. Решить уравнения: а) $2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$

б) $2\sin^2 x-\sin x\cos x=\cos^2 x$

5. Решить уравнение: $2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x$; $\sin 2x-\cos x=0$; $\sin 2x-\cos x=0$

6. Решить уравнения: а) $\sin 2x+2\cos 2x=1$; б) $3\sin 2x+\cos 2x=2\cos^2 x$; в) $\sin 5x-\sin x=0$