Занятие №14. Логарифмические неравенства

Опр. Неравенство вида $\log_a x > c$ называется **логарифмическим**.

Для решения правую и левую часть уравнения надо представить в виде логарифмов с одинаковыми основаниями: $\log_a x > \log_a d$. Далее можно перейти к неравенству относительно подлогарифмических выражений, причем, если *a>1,* то знак неравенства не меняется, а если 0<*a<1*, то меняется на противоположный. **После решения неравенства необходимо найти пересечение с ОДЗ (*x>0*)!**

В общем случае логарифмическое неравенство нужно привести к виду: $\log_a\left(f(x)\right) > \log_a\left(g(x)\right)$. Обратите внимание, что справа и слева находится одно слагаемое, коэффициент перед которым равен единице. Далее можно перейти к решению неравенства относительно подлогарифмических выражений и проверке условий ОДЗ:

1) если *a>1*

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases};$$

Прим.1: $\log_2 x < 3$

$$\begin{cases} \log_2 x < \log_2 8 \\ x > 0 \end{cases}; \begin{cases} x < 8 \\ x > 0 \end{cases}; \ x \in (0;8)$$

2) если 0<*a<1*

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases};$$

Прим.2: $\log_{\frac{1}{2}} x < 3$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}; \\ x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > \frac{1}{8}; \\ x > 0 \end{cases} x \in (0{,}125;+\infty).$$

1. Решить неравенство: а) $\log_3 x > 2$; б) $\log_{0,5} x > -2$; **в)** $\log_{0,7} x < 1$; г) $\log_{2,5} x < 2$;

д) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(12 - x^2) < -2$; е) $\log_{0,5}(3x - x^2) < -1$; **ё)** $\log_{\sqrt{2}}(6 - x^2) > 2$; ж) $\log_2(3 - x^2) > 1$.

2. Решить неравенство: а) $9^{\log_9(x-4)} < 3$; б) $5^{\log_5(x-7)} < 4$; **в)** $2^{\log_2(x+7)} < 3$; г) $26^{\log_{26}(x+1)} < 11$ **.**

3. Решить неравенство: а) $\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > -1$; б) $\log_5(3x + 1) > 2$; **в)** $\log_4(x - 2) < 2$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x + 1) < -2$;

д) $\log_{0,5}(2x + 3) > 0$.

4. Решить неравенство: а) $\lg(2x - 3) > \lg(x + 1)$; б) $\log_{0,3}(2x - 4) > \log_{0,3}(x + 1)$; **в)** $\log_{0,5} x > \log_2(3 - 2x)$;

г) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$; д) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 1) + \log_2(x - 1) > -2$; е) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) + 2\log_2(x + 1) < 2$.

5. Решить неравенство: а) $\lg(x + 2) + \log_{\frac{1}{\sqrt{10}}}(x + 2) > -1$; б) $3\log_3 x + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x < 1$;

в) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6$; г) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 > 0$.

Дополнительные задания:

1.Решить неравенство: а) $12^{\log_{12}(x+5)} < 7$; б) $11^{\log_{11}(x-1)} < 2$; **в)** $\log_{\frac{1}{4}}(5x - x^2) < -1$; г) $\log_3(4x - x^2) > 1$;

д) $2\log_{\frac{1}{5}}(x - 2) + 3\log_5(x - 2) < 1$; е) $\log_4(x - 3) + \log_2(x - 3) < \frac{3}{2}$; **ё)** $\log_3(2x^2 + x - 1) > \log_3 2$;

ж) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$.

Домашнее задание:

1. Решить неравенство: а) $\log_3 x > -4$; б) $\log_{0,5} x > -1$; **в)** $\log_{0,7} x < 0$; г) $\log_{2,5} x < 0$; д) $6^{\log_6(x+2)} < 3$;

е) $7^{\log_7(x+5)} < 2$.

2. Решить неравенство: а) $\lg(3x - 7) \le \lg(x + 1)$; б) $\log_{0,5}(4x - 7) < \log_{0,5}(x + 2)$;

в) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$; г) $\lg x + \lg(x - 1) < \lg 6$; д) $\log_4(5 - x^2) > 1$;

е) $\log_{\frac{1}{9}}(4x - x^2) < -0,5$; **ё)** $\log_5(3x - 2x^2) > 0$; ж) $\log_{\frac{1}{4}}(6x - 4x^2) < -0,5$.

3. Решить неравенство: а) $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) + \log_4(x - 1) < \frac{5}{2}$; б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 4) + \log_2(x - 4) > -1$;

в) $\log_{\sqrt{3}}(x + 1) + \log_{3\sqrt{3}}(x + 1) < \frac{8}{3}$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) + \log_{\sqrt{2}}(x + 2) < 1$; д) $\log_3^2 x - 9 \le 0$.