

№ 7 Окружности. Углы. Хорды. Касательные.

Опр. Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной. Данная точка называется центром окружности, а расстояние – радиусом.

Опр. Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

Опр. Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.

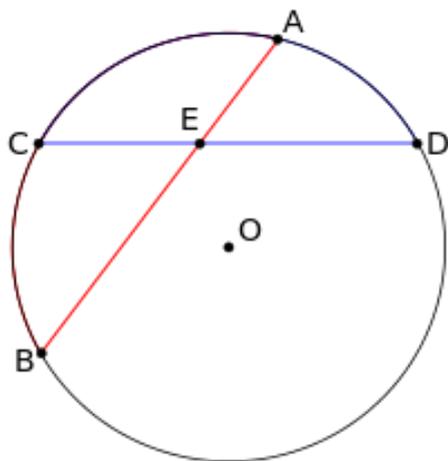
Опр. Касательная к окружности – прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

Опр. Секущая – прямая, имеющая с окружностью две общих точки.

Свойства хорд. Выполните поясняющие рисунки

- Хорды являются равноудаленными от центра окружности только тогда, когда они равны по длине.
- Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
- Радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.
- Дуги, заключенные между двумя равными параллельными хордами, равны.
- При пересечении двух хорд окружности, получаются отрезки, произведение длин которых у одной хорды равно соответствующему произведению у другой (см. рисунок).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

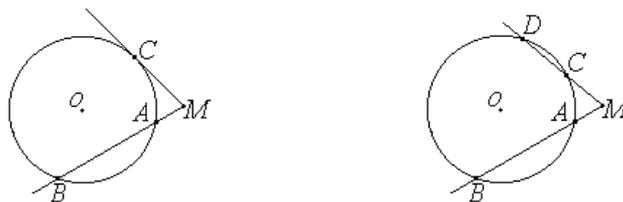


Свойства касательных.

Выполнить поясняющие рисунки:

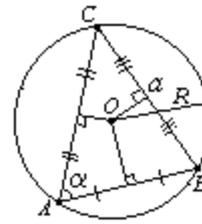
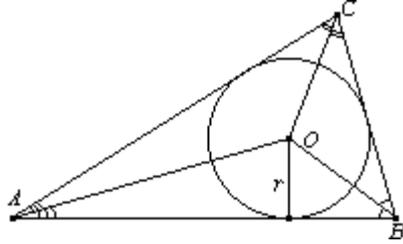
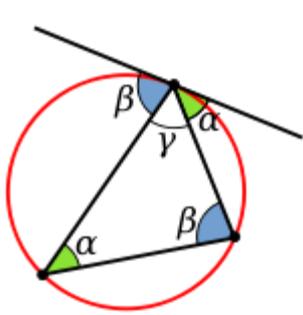
- Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.
- Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Теорема о касательной и секущей. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены **касательная** и **секущая**, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть: $MC^2 = MA \cdot MB$.



Теорема о секущих. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Через вершину треугольника проведена касательная к описанной окружности тогда углы:



Окружность и треугольник

- центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника, ее радиус r вычисляется

$$r = \frac{S}{P}, \quad P = \frac{a+b+c}{2}$$

по формуле:

- центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров, ее радиус R вычисляется по формуле:

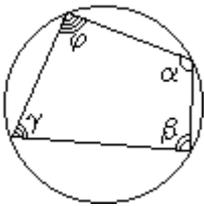
$$R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha}, \quad R = \frac{abc}{4S};$$

здесь a, b, c — стороны треугольника, α — угол, лежащий против стороны a , S — площадь треугольника;

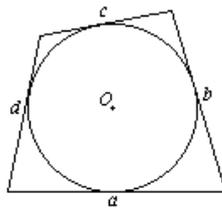
- центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы;
- центр описанной и вписанной окружностей треугольника совпадают только в том случае, когда этот треугольник — правильный.

Окружность и четырехугольники

- около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его внутренних противоположных углов равна 180° :



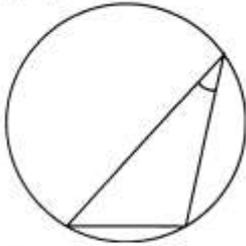
$$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180^\circ;$$



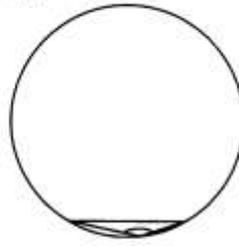
$$a + c = b + d;$$

- в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда у него равны суммы противоположных сторон:
- около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником;
- около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция — равнобедренная; центр окружности лежит на пересечении оси симметрии трапеции с серединным перпендикуляром к боковой стороне;
- в параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

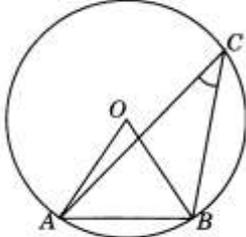
Т7.10. Найдите острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности.



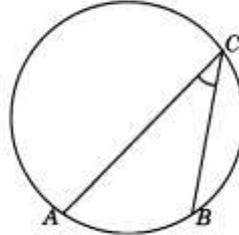
Д4.10. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?



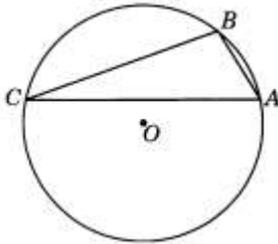
Т7.11. Центральный угол на 36° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.



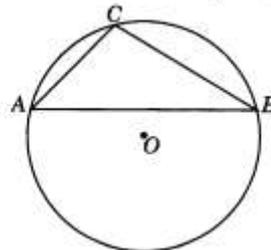
Д4.11. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности.



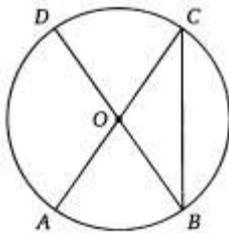
Т7.12. Точки A, B, C , расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как $1:3:5$. Найдите больший угол треугольника ABC .



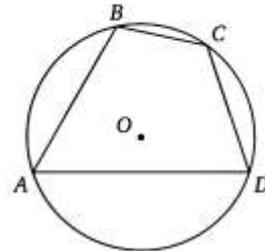
Д4.12. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $5:7$. Под какими углами видна эта хорда из точек C меньшей дуги окружности?



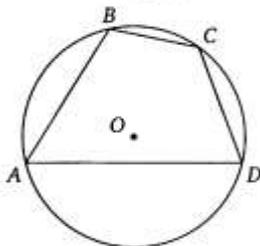
4. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 110° . Найдите вписанный угол ACB .



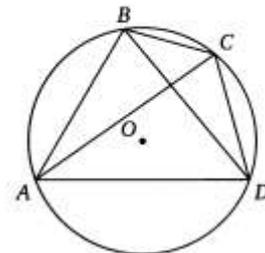
7. Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги, градусные величины которых относятся как $4:2:3:6$. Найдите угол A четырехугольника $ABCD$.



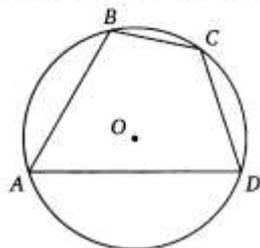
5. Угол A четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58° . Найдите угол C этого четырехугольника.



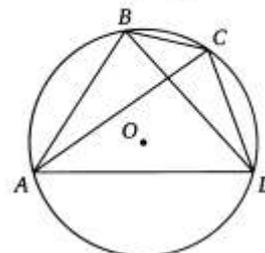
8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABD .



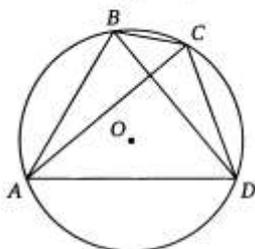
6. Стороны четырехугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно $95^\circ, 49^\circ, 71^\circ, 145^\circ$. Найдите угол B этого четырехугольника.



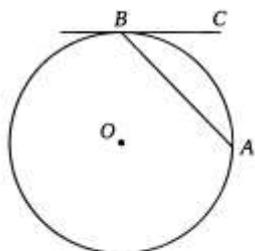
9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 75° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABC .



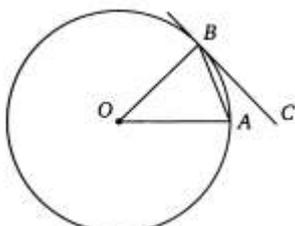
10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110° , угол ABD равен 70° . Найдите угол CAD .



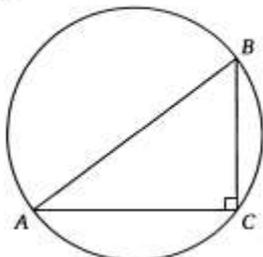
11. Хорда AB стягивает дугу окружности в 92° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B .



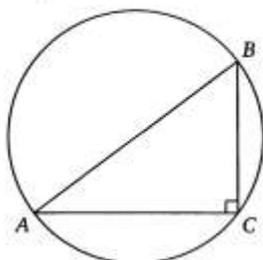
12. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32° . Найдите градусную величину дуги, стягиваемую хордой AB .



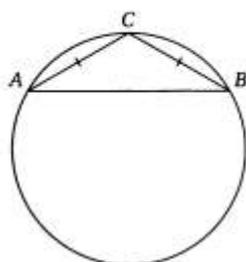
7. В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90° . Найдите радиус описанной окружности.



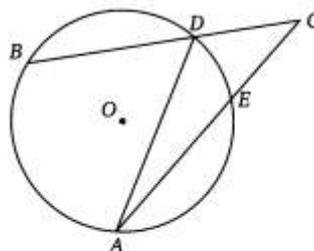
8. В треугольнике ABC $BC = 6$, угол C равен 90° . Радиус описанной окружности равен 5. Найдите AC .



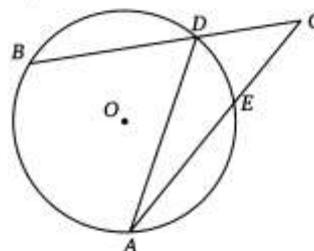
9. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.



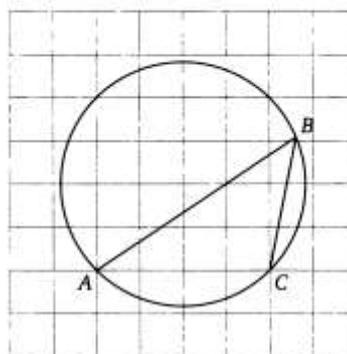
19. Найдите угол ACB , если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38° .



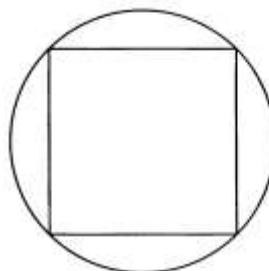
20. Угол ACB равен 42° . Градусная величина дуги AB окружности равна 124° . Найдите угол DAE .



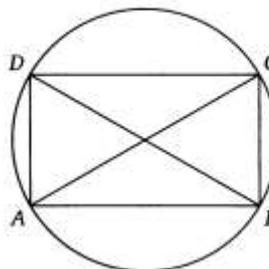
21. Найдите величину угла ABC .



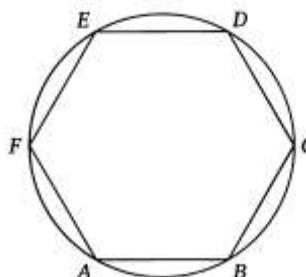
13. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{8}$.



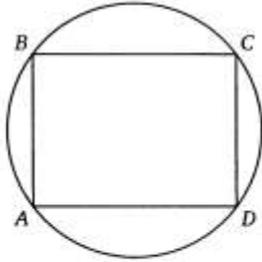
14. Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен 60° . Найдите радиус описанной окружности.



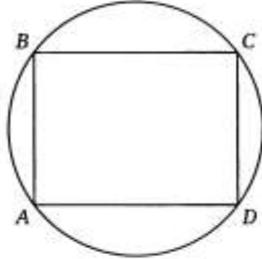
15. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного окружности, радиус которой равен 6?



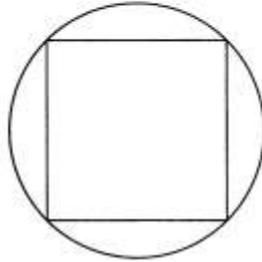
10. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 3 и 4.



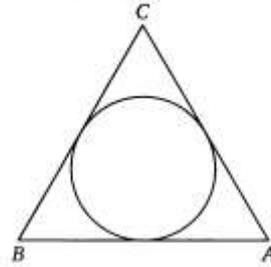
11. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.



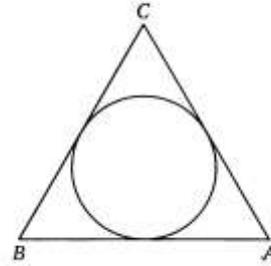
12. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $\sqrt{8}$.



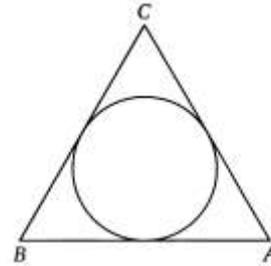
19. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



20. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

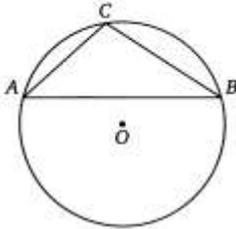


21. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.

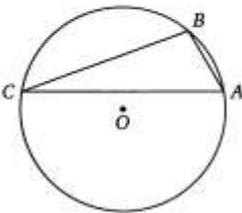


Домашнее задание.

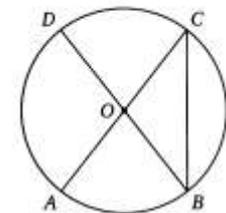
1. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5 : 7. Под какими углами видна эта хорда из точек C меньшей дуги окружности?



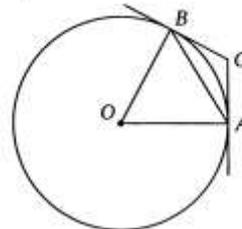
2. Точки A, B, C , расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как 1 : 3 : 5. Найдите больший угол треугольника ABC .



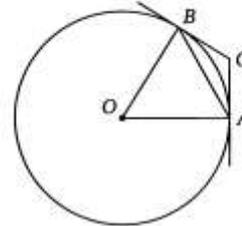
3. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Вписанный угол ACB равен 38° . Найдите центральный угол AOD .



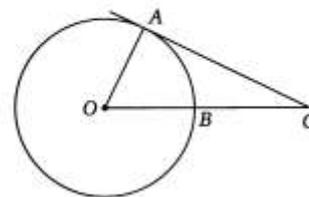
13. Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC . Найдите угол ACB .



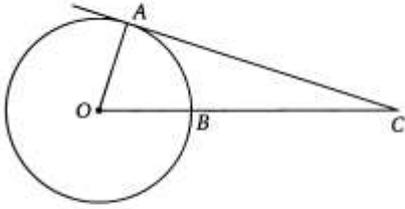
14. Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB , равный 122° . Найдите градусную величину дуги AB , стягиваемую точками касания.



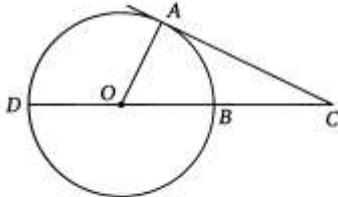
15. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности, а дуга AB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 64° .



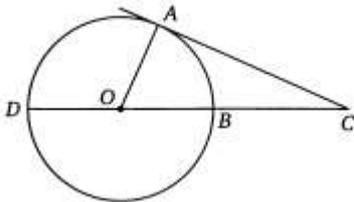
16. Угол ACO равен 28° . Его сторона CA касается окружности. Найдите градусную величину дуги AB окружности, заключенной внутри этого угла.



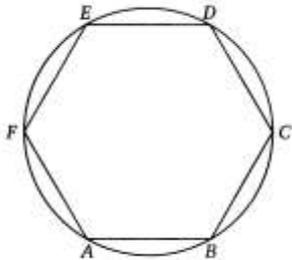
17. Найдите угол ACD , если его сторона CA касается окружности, а дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 116°



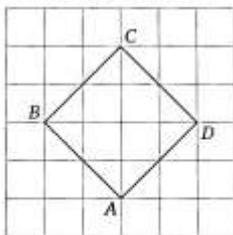
18. Угол ACD равен 24° . Его сторона CA касается окружности. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключенной внутри этого угла.



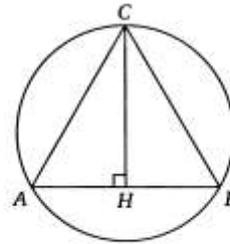
28. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.



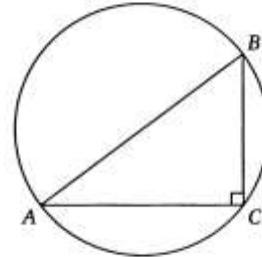
29. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$.



4. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.



5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности.



6. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.

