Занятие №6. Преобразование тригонометрических выражений.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\quad n \in Z$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \alpha \neq \pi n;\quad n \in Z$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha;\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\quad n \in Z$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha;\quad \alpha \neq \pi n;\quad n \in Z$$

2°. Формулы сложения аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

3°. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha;$$
$$1 \pm \sin 2\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2$$

4°. Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2};\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

5°. Формулы сложения одноименных тригонометрических функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

6°. Соотношения между $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (универсальная подстановка):

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha \neq \pi(2\pi+1),\ n \in Z;$$
$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

7°. Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$;	π,	$\frac{7\pi}{6}$;	$\frac{5\pi}{4}$;	$\frac{4\pi}{3}$;	$\frac{3\pi}{2}$;	$\frac{5\pi}{3}$;	$\frac{7\pi}{4}$;	$\frac{11\pi}{6}$;	2π,
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

1. Упростить выражение: а) $\sin^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$; б) $\dfrac{1-2\cos^2\beta}{\cos\beta + \sin\beta}$

в) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha}$; д) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - (tg\alpha)^2$.

2. Упростить выражение: а) $7\cos^2\alpha - 5 + 7\sin^2\alpha$; б) $\cos x - tgx\sin x$; в) $\cos^4 x + \sin^2\cos^2 x$;
г) $1 - \sin\alpha \cdot ctg\alpha \cdot \cos\alpha$

3. Найдите значение выражения:

а) $14\sin^2\alpha - 3$, если $\cos^2\alpha = 0{,}7$; б) $3 + 2tg^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0{,}3$;

в) $tg\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$, $\alpha \in (\dfrac{\pi}{2};\pi)$.

4. Вычислить:

а) $\cos^2(\pi-\alpha)tg(\pi+\alpha)tg(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha) + \sin(2\pi-\alpha)\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)$;

б) $4\cos(3\alpha - \dfrac{\pi}{6}) + ctg(\alpha + \dfrac{\pi}{12})$, если $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

в) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$; г) $\dfrac{6\sin 15^o \cos 15^o}{2\cos^2 15^o - 1}$; д) $\left(\sin\dfrac{7\pi}{18} - \sin\dfrac{\pi}{18}\right) : \cos\dfrac{2\pi}{9}$.

5. Вычислить:

а) $\sin\dfrac{17\pi}{4} + \cos(-\dfrac{15\pi}{6}) + \sin^2 29\pi$; б) $-6\sin(-\dfrac{23\pi}{3}) + 2\cos\dfrac{31\pi}{2} - tg\dfrac{117\pi}{4}$.

Дополнительные задания:

1. Упростить выражение: а) $-4\sin^2\alpha + 5 - 4\cos^2\alpha$; б) $1 - \dfrac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{2\cos\alpha} - (tg\alpha)^2$

в) $1 + ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\sin x \cos x$;

3. Вычислить:

а) $\dfrac{\cos^2 22{,}5^o - \sin^2 22{,}5^o}{\cos 25^o \cos 20^o - \sin 25^o \sin 25^o}$; б) $\sqrt{2}\sin 22{,}5^o \cos 22{,}5^o$;

Домашнее задание:

1. Упростить выражение:

а) $(\sin^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha)ctg\alpha$; б) $\dfrac{\sin^2 t - 1}{\cos^4 t} + tg^2 t$ **;** в) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}$

2. Вычислить:

а) $\left(\sin^2\dfrac{\pi}{8} - \cos^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2$; б) $\dfrac{\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$

3. Найдите значение выражения:

а) $4\cos^2\alpha + 2$, если $\sin^2\alpha = 0{,}6$; б) $2 - tg^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0{,}2$