Задание 2 – Логические выражения

Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Бывают общими, частными и единичными.

Истинность высказываний выражается через логические величины, которые могут принимать лишь два значения: **И** (истина, **1**) и **Л** (ложь, **0**).

Формула логики высказываний содержит логические константы, логические переменные и логические операции:

- отрицание ($\neg, \bar{a}$) - **НЕ**
- конъюнкция ($\wedge, \&, \cdot$) - **И**
- дизъюнкция ($\vee, +$) - **ИЛИ**
- импликация ($\rightarrow, \Rightarrow$) – если - то
- эквивалентность ($\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \equiv$) – тогда и только тогда, когда
- взимоисключающее «или» ($\oplus, \Delta$) – либо-либо

Все они могут быть заданы своими *таблицами истинности*:

A	B	$\neg A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Основные операции – отрицание (инверсия), конъюнкция (логическое умножение) и дизъюнкция (логическое сложение). Остальные могут быть выражены через них.

Преобразование логических выражений выполняется по следующим законам и правилам:

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$.
2. $\overline{A \& B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.
3. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \& \overline{B}$.
4. $\overline{A \rightarrow B} \equiv A \& \overline{B}$.
5. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$.
6. $A \leftrightarrow B \equiv (A \& B) \vee (\overline{A} \& \overline{B}) \equiv (\overline{A} \vee B) \& (A \vee \overline{B})$.
7. $A \& (A \vee B) \equiv A$.
8. $A \vee A \& B \equiv A$.
9. $\overline{A} \& (A \vee B) \equiv \overline{A} \& B$.
10. $A \vee \overline{A} \& B \equiv A \vee B$.
11. **Законы коммутативности:**
    $A \& B \equiv B \& A$;
    $A \vee B \equiv B \vee A$.
12. **Законы ассоциативности:**
    $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$;
    $(A \& B) \& C \equiv A \& (B \& C)$.
13. **Законы идемпотентности:**
    $A \vee A \equiv A$;
    $A \& A \equiv A$.
14. **Законы дистрибутивности:**
    $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$;
    $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$.
15. $A \vee 1 \equiv 1$, $A \& 1 \equiv A$, $\overline{A} \vee A \equiv 1$.
16. $A \& 0 \equiv 0$, $A \& \overline{A} \equiv 0$.

Если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», «импликация», и самая последняя – «эквивалентность».

Количество *разных* логических выражений, удовлетворяющих неполной таблице истинности, равно 2^k, где k – число *отсутствующих* строк; например, полная таблица истинности выражения с тремя переменными содержит $2^3=8$ строчек, если заданы только 6 из них, то можно найти $2^{8-6}=2^2=4$ *разных* логических выражения, удовлетворяющие этим 6 строчкам (но отличающиеся в двух оставшихся).